DOI:10.16262/j.cnki.1000-8217.1997.04.012

可积与不可积系统的量子对称性方法

常 哲

(中国科学院高能物理研究所，北京 100039)

[摘要] 可积系统是理论物理学最活跃的研究领域之一，在几十年的过程中发展了一系列成熟的理论方法，极大地推动了物理学的发展。量子群与量子对称性是可积系统研究的最新发展，在广泛的物理问题中有重要的应用。实际上，量子对称性已经超越可积系统的原来框架，也已成为解决不可积问题的重要手段。我们试图评述量子群的引入背景、量子群理论，特别是量子对称性研究的最新结果。

[关键词] 量子对称性，量子群，Yang-Baxter 方程，可积系统

引 言

自然界中到处都有对称性。对很多物体来说，左右对称性有时是明显的。也许人类的祖先很早就注意到了我们生活中的对称性。但是，只利用对称性来确定物质运动行为的历史并不是很长，只是在现代物理学中对称性才确立了其无可替代的地位。在近代物理学中，对称性与可观测量或不可观测量联系在一起。说一系统具有时空平移不变性，等同于该系统能量及动量守恒，而旋转不变的系统一定是角动量守恒的。由于物质运动的复杂性，很难了解物质运动的详细情况，有些情况下甚至是不可能的，如基本粒子内部的夸克运动等。这时，物理学家的唯一武器也许就是对称性了。漫步今天的物理学无处不看到对称性的影子，可以不过分地说，现代物理学是伴随着对称性的研究而发展的。点群的分类与表示是固体物理学的基础；共形不变性是理解临界现象与超弦理论的关键；没有幺正幺模群就根本谈不上高能物理的所谓标准模型。但是，无论所研究的系统多么复杂多变，从数学结构上讲这些对称性研究的工具都是群论。

近年来，一种新的对称性——量子对称性及其数学结构量子群的研究波及物理与数学界的方方面面。而量子群实际上并非群甚至连半群都谈不上，只是由于历史的原因才被冠之于量子群这一屡遭误解的名字。量子群的引入与可积系统的研究紧密联系在一起。

1 可积系统与 Yang-Baxter 方程

1967年，杨振宁先生[1]仔细地研究了一类具 δ 势的一维量子场论问题。利用 Bethe Ansatz 方法，杨振宁先生证明，如果算子 $R(u)$ 满足某种关系式就可以得到这类问题的严格解。Baxter 教授在有关八顶角模型的论文中[2]得到关于顶角的玻尔兹曼权重因子 $w(\beta_i, \alpha_i,$

本文于1996年12月16日收到.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\beta_i, \alpha_i \mid u$)的一组关系式。如果把 $R(u)$ 与 $w(\beta, \alpha, \beta', \alpha' \mid u)$ 理解为张量乘积空间 $V^{\otimes 2}$ 的算子 $\mathscr{R}(u)$，在 $V^{\otimes 3}$ 中可以把它们统一写成

$$\mathscr{R}_{12}(u)\,\mathscr{R}_{13}(u+v)\,\mathscr{R}_{23}(v)=\mathscr{R}_{23}(v)\mathscr{R}_{13}(u+v)\mathscr{R}_{12}(u)$$

这就是通常形式的 Yang-Baxter 方程。Yang-Baxter 方程一般表示为系统的可积条件。一旦得到一组 Yang-Baxter 方程解，问题也就随之得到解决。从而，Yang-Baxter 方程成为可积系统的主导方程，求解 Yang-Baxter 方程也就成为研究可积问题的重要课题。以致有人评论说，70 年代 Yang-Mills 理论改变了整个高能物理理论，Yang-Baxter 方程则构成 90 年代理论物理学最重要的研究课题。Yang-Mills 理论与 Yang-Baxter 方程是杨振宁先生对物理学的两个划时代的重要贡献。

Yang-Baxter 方程是一组非线性算子方程，求解非常困难，杨振宁先生得到了它的第一个解，以后经过长期努力又求得一系列个别解。80 年代以后，Drinfel'd 与 Jimbo 等人[3]开始探讨 Yang-Baxter 方程的系统解方法。人们注意到，Yang-Baxter 方程的一类重要解包含一个额外参数 γ(量子化参数)，如果在量子化参数的零点附近对这类解作展开，就得到 $\mathscr{R}(u, \gamma)$ 的经典极限 $r(u)$ 满足的一个较简单的方程——经典 Yang-Baxter 方程。利用李代数的表示论可以得到一类经典 Yang-Baxter 方程解的完整分类。正是这一成功促使人们构造一种新的数学结构，它的表示可以给出 Yang-Baxter 方程的系统解。这也就是“量子群”命名的历史缘由。一旦引进了量子群理论，Yang-Baxter 方程的研究也就突破了可积系统的范畴，成为物理与数学界广泛关注的问题。

2 量子群理论

域 C 上的一个代数是包含两个线性运算：乘法 m 与单位 η 的线性空间 A，$m: A\otimes A\to A$，$\eta: C\to A$，并满足结合律，存在单位元。当涉及到表示的张量积时还要引进另外一个线性运算：余乘积 $\Delta: A\to A\otimes A$。余乘积为满足余结合律的代数同胚。如果再引进余单位运算 $\varepsilon: A\to C$，满足 $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta=\mathrm{id}$，则我们构成一个双代数。与每个群元素都有逆这样一个事实相联系，有些双代数有一个被称为 antipode 的运算 $S: A\to A$。Antipode 满足 $m(S\otimes\mathrm{id})\Delta=m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta=\eta\circ\varepsilon$。这样一类双代数被称为 Hopf 代数。一个李代数 g 的包络 $U(g)$，如果定义乘法为普通乘法，$\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x$，$\eta(\alpha)=\alpha 1$，$\varepsilon(1)=1$，$\varepsilon(x)=0\,(x\neq 1)$，$S(x)=-x$，则构成一个 Hopf 代数。

李双代数是一个具有满足 1-cocycle 条件的余反对称运算 ψ 的李代数。李双代数 $(A_{(0)}, m_{(0)}, \Delta_{(0)}, \eta_{(0)}, \varepsilon_{(0)}, \psi)$ 的量子化是环 $C[[\gamma]]$ 上的非余交换代数 $(A, m, \Delta, \eta, \varepsilon)$。一个通常的李单代数或非扭曲仿射 Kac-Moody 代数 g 的 Borel 包络子代数 $U^+(g)$ 与 $U^-(g)$ 的量子化对应被记作 $U_q^+(g)$ 与 $U_q^-(g)$。对一个 Hopf 代数 $(A, m, \Delta, \eta, \varepsilon, S)$ 可以用递推法定义高阶余乘法 $\Delta^{(n-1)}: A\to A^{\otimes n}[\Delta^{(1)}=\Delta, \Delta^{(n)}=(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta^{(n-1)}]$。一般情况下，对两个 Hopf 代数 A 与 B 及满足下列条件的非退化双线性形式 $(\langle\cdots,\cdots\rangle: A\times B\to C)$，

$$\begin{aligned}&\langle a^i, b_jb_k\rangle = \langle\Delta_A(a^i), b_j\otimes b_k\rangle,\ \langle a^ia^j, b_k\rangle = \langle a^j\otimes a^i, \Delta_B(b_k)\rangle\\&\langle 1^A, b_j\rangle = \varepsilon_B(b_i),\ \langle a^i, 1_B\rangle = \varepsilon_A(a^i), \langle S_A(a^i),\ S_B(b_j)\rangle = \langle a^i, b_j\rangle\end{aligned}\tag{1}$$

可以证明如下定理：存在唯一的 $(A, B, \langle\cdots,\cdots\rangle)$ 的量子偶 D，满足：

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

A 与 B 都是 D 的 Hopf 子代数;

如果 $\{a^\alpha\}$ 与 $\{b_\beta\}$ 分别是 A 与 B 的基，那么乘积 $\{a^\alpha b_\beta\}$ 则构成 D 的一组基;

对于 $a^i \in A, b_j \in B$, 和 $\sum a^{i(1)} \otimes a^{i(2)} \otimes a^{i(3)} \equiv \Delta_A^{(2)}(a^i)$, $\sum b_{j(1)} \otimes b_{j(2)} \otimes b_{j(3)} \equiv \Delta_B^{(2)}(b_j)$, 有 $b_j a^i = \sum \langle a^{i(1)}, S(b_{j(1)}) \rangle \langle a^{i(3)}, b_{j(3)} \rangle a^{i(2)} b_{j(2)} \in D$。

$(U_q^+(g), U_q^-(g), \langle \cdots, \cdots \rangle)$ 的量子偶 D 加上约束 $q_i^{2H_i}[\in U_q^+(g)] = q_i^{2H_i}[\in U_q^-(g)]$ 就得到了量子群 $U_q(g)$[3],

$$
\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, X_j^\pm] = \pm a_{ij} X_i^\pm, \quad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij}[H_i]_{qi}, \quad [X_i^\pm, X_j^\pm] = 0 \text{ if } a_{ij} = 0 \\
&\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{qi} (X_i^\pm)^{1-a_{ij}-m} X_j^\pm (X_i^\pm)^m = 0, \quad (i \neq j) \\
&\Delta(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \quad \Delta(X_i^\pm) = X_i^\pm \otimes q_i^{H_i} + q_i^{-H_i} \otimes X_i^\pm \\
&\varepsilon(H_i) = 0 = \varepsilon(X_i^\pm), \quad S(H_i) = -H_i, \quad S(X_i^\pm) = -q^{-\sum_i H_i} X_i^\pm q^{\sum_i H_i}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

这里我们使用了这样的记号 $q_i = q^{d_i}$, $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \dfrac{[m]_q!}{[n]_q!\ [n-m]_q!}$, $[m]_q = \dfrac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$

3　量子对称性

除了晶体的点群对称性等静止对称性以外，我们了解的大多数物理对称性是运动系统的对称性。李政道先生在谈到运动系统的对称性时曾形象地拿一支铅笔在一张白纸上左右晃动而阐述左右的大致对称性。实际的物理对称性少有是绝对的对称性。新的研究方法可以发现新的对称性。某种对称性破缺的系统却可能存在另外一种对称性，这也正是对称性研究的魅力所在。量子群的引进给物理学家研究新的物理系统对称性提供了有力的工具。一般称系统的量子群对称性为量子对称性。量子对称性的研究使得量子群从单纯 Yang-Baxter 系统解构造的工具而转变为广泛物理领域关注的焦点。

3.1　经典与量子动力系统

一类经典系统——纯自旋系统(pure-spin systems)可以由相对刚体标架坐标的角动量分量 J_i 唯一地确定。对这类系统，利用广义泊松括号及导数规则可以得到标准哈密顿形式的运动方程[4]。

变形对称陀螺的哈密顿量为

$$
H_q = \frac{I - I_3}{2II_3} J_3'^2 + \frac{1}{2I}\left(J_1'^2 + J_2'^2 + \frac{(\sinh \gamma J_3')^2}{\gamma \sinh \gamma} \right), \quad q = e^\gamma \tag{3}
$$

它的相空间与辛形式由下式给出

$$
M_0^q: \quad J_1'^2 + J_2'^2 + \frac{(\sinh \gamma J_3')^2}{\gamma \sinh \gamma} = J_q^2, \quad J_q = \frac{\sinh \gamma J_0}{\sqrt{\gamma \sinh \gamma}}
$$

$$
\Omega_q = \frac{1}{J_q^2}\left(J_1' dJ_2' \wedge dJ_3' + J_2' dJ_3' \wedge dJ_1' + \frac{\tanh \gamma J_3'}{\gamma} dJ_1' \wedge dJ_2' \right)
$$

标准过程给出基本广义泊松括号

$$
[J_+', J_-']_{GPB} = i \frac{\sinh 2\gamma J_3'}{\sinh \gamma}, \quad [J_3', J_\pm']_{GPB} = \pm i J_\pm' \tag{4}
$$

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

对上面的代数关系采用预量子化方法可以引进 Hopf 运算，这也就是所谓的 $SU_{q,\hbar\to 0}(2)$ 量子群[5]，它给出人们熟悉的对称陀螺运动方程。

利用几何量子化方法，我们可以把上面的讨论推广到量子对称陀螺系统。形变量子对称陀螺的哈密顿量与其本征值为

$$\begin{aligned}\hat{H}_q &= \frac{\hbar^2(I-I_3)}{2II_3}\hat{J}'^2_3+\frac{\hbar^2}{2I}\left(\frac{\gamma}{\sinh\gamma}\hat{J}'_+\hat{J}'_-+[\hat{J}'_3]_q[\hat{J}'_3+1]_q\right)\\ E^q_{JK} &= \frac{\hbar^2}{2I}[J]_q[J+1]_q+\frac{I-I_3}{2II_3}\hbar^2K^2\end{aligned}\tag{5}$$

量子形变陀螺的能量本征值有非常明确的物理含义，形变参数 q 对应系统的非线性修正。这对陀螺分子的精细光谱结构给出了一种可能的解释。

3.2 可积格点模型

六顶角模型的 Yang-Baxter 方程谱参数解 $\mathscr{R}(u)$，使得转移矩阵 $\boldsymbol{v}^{(n)}(u)$ 可作为守恒量的产生泛函[6]。而 $\boldsymbol{v}^{(n)}(u)$ 的作用空间 $V^{\otimes m}$ 可认定为一维量子系统的希尔伯特空间。$\boldsymbol{v}^{(n)}(u)$ 与 $\boldsymbol{v}^{(n)}(v)$ 的对易性导致无穷多量 $\mathscr{H}_i[\equiv\frac{\partial^i}{\partial u^i}\log\boldsymbol{v}^{(n)}(u)\mid_{u=0}]$ 相互对易。如果令 $\mathscr{H}_1$ 为该量子系统的哈密顿量，我们得到与 $\mathscr{H}_1$ 对易的无穷多守恒量。这种方式得到的哈密顿量形式为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_1 &= -\frac{1}{\sin\eta}\sum_{i=1}^{n}e_i\\ e_i &= 1_{(1)}\otimes 1_{(2)}\otimes\cdots\otimes 1_{(i-1)}\otimes e_{(i,i+1)}\otimes 1_{(i+2)}\otimes\cdots\otimes 1_{(n)}\\ e &= -\frac{1}{2}(\sigma^1\otimes\sigma^1+\sigma^2\otimes\sigma^2+\cos\eta\sigma^3\otimes\sigma^3)+\frac{1}{2}\cos\eta\cdot 1-\frac{i}{2}\sin\eta(\sigma^3\otimes 1-1\otimes\sigma^3)\end{aligned}\tag{6}$$

这里 η 是自由参数($q=e^{i\eta}$)，σ^i 为泡利矩阵，e_i 是 $1-P_{i(i+1)}$ 的量子对应，满足所谓的 Temperley-Lieb 代数。定义 $S^\pm=\Delta^{(n)}(s^\pm)$，$S^3=\Delta^{(n)}(s^3)$，不难证明哈密顿量 $\mathscr{H}_1$ 是量子群 $SU_q(2)$ 不变的，即 $[\mathscr{H}_1, SU_q(2)]=0$。从而顶角模型除了明显保证自旋守恒的 $U(1)$ 对称性以外还具有 $SU_q(2)$ 量子群对称性。按同样的方法可以证明 S.O.S 模型的 diagonal-to-diagonal 转移矩阵给出与顶角模型同样的哈密顿量。从而我们可以得到这样的结论，可积格点模型是量子群不变的。量子群生成元作用在格点的对角线上，其可以解释为量子群自旋-1/2 表示的直积。量子对称性方法把可积格点模型的解映射为一组耦合代数方程[7]。这就使得求解格点模型变得简单易行。

3.3 共形场论

共形场论最小模型的库仑气体形式由无穷远处存在背景荷 $2\alpha_0$ 的无质量标量场 ϕ 给出。利用屏蔽流 $J(z)$，定义[8]屏蔽算子 $X^-_\pm$

$$X^-_\pm V_\alpha(z)=\frac{1}{1-q_\pm^{-1}}\int_G \mathrm{d}tJ_\pm V_\alpha(z)\tag{7}$$

这里 $q_\pm=e^{2\pi i\alpha_\pm^2}$，适当选择的积分路径使得屏蔽算子为一 intertwiner。再引进算子 $k_\pm$，

$$k_\pm V_\alpha(z)=\exp(-2i\pi\alpha_\pm\oint_c\partial\phi)V_\alpha(z)$$

可以自然得到最小模型对应的量子群 Borel 子代数

$$[X^-_+,X^-_-]=0,\quad [k_+,k_-]=0,\quad k_\pm X^-_\pm k_\pm^{-1}=q_\pm^{-1}X^-_\pm,\quad k_\pm X^-_\mp k_\pm^{-1}=-X^-_\mp\tag{8}$$

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

我们利用屏蔽算子在 Virasoro 代数下的变换性质定义 $X_{\pm}^{-}$ 的对偶 $X_{\pm}^{+}$。$X_{\pm}^{-}$ 与 $k_{\pm}$ 给出最小模型量子群结构的另外一个 Borel 子代数,

$$[X_{+}^{+}, X_{-}^{+}] = 0, \quad k_{\pm} X_{\pm}^{+} k_{\pm}^{-1} = q_{\pm} X_{\pm}^{+}, \quad k_{\pm} X_{\mp}^{+} k_{\pm}^{-1} = - X_{\mp}^{+}$$
$$X_{\pm}^{+} X_{\pm}^{-} - q_{\pm} X_{\pm}^{-} X_{\pm}^{+} = \frac{1 - k_{\pm}^{-2}}{1 - q_{\pm}^{-1}}, \quad X_{\pm}^{+} X_{\mp}^{-} - q_{\pm} X_{\mp}^{-} X_{\pm}^{+} = 0 \tag{9}$$

定义算子 $X_{\pm}^{-}$ 在普通乘积空间 $V_{\alpha}(z_1) V_{\beta}(z_2)$ 的作用为 Hopf 代数的余乘运算。$k_{\pm}$ 的余乘运算由屏蔽流 $J_{\pm}$ 与顶角算子 $V_{\alpha}(z)$ 的辨子性质给出。而由 Virasoro 算子可以得到 $X_{\pm}^{+}$ 的余乘运算

$$\Delta(X_{\pm}^{-}) = X_{\pm}^{-} \otimes 1 + k_{\pm}^{-1} \otimes X_{\pm}^{-}, \Delta(k_{\pm}) = k_{\pm} \otimes k_{\pm}, \Delta(X_{\pm}^{+}) = X_{\pm}^{+} \otimes 1 + k_{\pm}^{-1} \otimes X_{\pm}^{+} \tag{10}$$

余乘以外的其他 Hopf 运算形式为

$$\varepsilon(k_{\pm}) = 1, \quad \varepsilon(X_{\pm}^{-}) = 0 = \varepsilon(X_{\pm}^{+})$$
$$S(k_{\pm}) = k_{\pm}^{-1}, \quad S(X_{\pm}^{-}) = - k_{\pm} X_{\pm}^{-}, \quad S(X_{\pm}^{+}) = - k_{\pm} X_{\pm}^{+} \tag{11}$$

Antipode 实质上是一个路径反运算,而余单位为一路径湮灭映射。$k_{\pm}$, $X_{\pm}^{-}$ 与 $X_{\pm}^{+}$ 生成的量子群代表了最小模型的量子对称性结构。利用几乎完全相同的方法,我们可以研究 WZNW 模型的更一般的量子对称性结构。

3.4 分子谱

考虑振转耦合后,一般形式的双原子分子振转谱由 Dunham 展开式[9]描述

$$E_{\text{vib-rot}}(v, J) = hc \sum_{ij} Y_{ij} (v + \frac{1}{2})^{i} (J(J+1))^{j} \tag{12}$$

一个成功的分子谱理论至少应该正确地导出 Dunham 展开式的几个主导项,给出分子波函数的形式,并有严格的跃迁选择定则。事实上,同时满足这几个条件并非一件容易事情[10]。

具有量子对称性的振动谱由哈密顿量 $H_{q\text{-vib}}[=\frac{1}{2}(a_q^{\dagger} a_q + a_q a_q^{\dagger}) hc\nu_{\text{vib}}]$ 描述。形变谱振子满足量子谱振子群 $H_q(4)$。由量子谱振子群表示可以得到分子振动波函数 $\tilde{\psi}_v(x) = N_v H_v(X) e^{-X^2/2}$。该波函数给出振动谱的严格跃迁选择定则。由量子谱振子群得到的振动谱为

$$E_{q\text{-vib}}(v) = \frac{1}{2}([v + 1 + b\gamma]_q + [v + b\gamma]_q) hc\nu_{\text{vib}} =$$
$$\text{hc}\nu_{\text{vib}} \frac{\sinh(\gamma c)}{2\sinh(\frac{\gamma}{2})} + \cosh(\gamma c)\left(v + \frac{1}{2}\right) +$$
$$\frac{\gamma \sinh(\gamma c)}{2}\left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2 \cosh(\gamma c)}{6}\left(v + \frac{1}{2}\right)^3 + \cdots, \quad c \equiv b\gamma \tag{13}$$

具量子对称性的转动哈密顿量为 $H_{q\text{-rot}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I}(J_{-}^{'} J_{+}^{'} + [J_3^{'}]_q [J_3^{'} + 1]_q)$。量子群 $SU_q(2)$ 的表示给出转动谱的波函数 $\tilde{\psi}_{JM}(\text{x}) = Y_{JM}(\theta, \phi)$。此波函数给出严格的转动跃迁选择定则。而转动谱由 Casimir 算子在该表示中的取值得到

$$E_{q\text{-rot}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I}[J]_q [J+1]_q =$$

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{h^2}{8\pi^2 I}\left(\left(1-\frac{1}{6}\gamma^2+\frac{7}{360}\gamma^4\right)J(J+1)+\gamma^2\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{90}\gamma^2\right)(J(J+1))^2+\frac{2\gamma^4}{45}(J(J+1))^3+\cdots\right) \tag{14}$$

振转耦合谱由下面具量子对称性的哈密顿量描述

$$H_{q-\mathrm{vib}-\mathrm{rot}}=\frac{1}{2}(a^{\dagger}_{q(J)}a_{q(J)}+a_{q(J)}a^{\dagger}_{q(J)})hc\nu_{\mathrm{vib}}+\frac{h^2}{8\pi^2 I}(J_-J_++J_3(J_3+1)) \tag{15}$$

量子化参数 q 不再是一个常数而是依赖于 J 的函数。量子群直积 $H_{q(J)}(4)\otimes SU(2)$ 的表示给出振转耦合波函数 $\tilde{\psi}_{q(J)-\mathrm{vib}-\mathrm{rot}}(v,x)=N_v Y_{JM}(\theta,\phi)H_v(X)e^{-X^2/2}$。严格的振转跃迁选择定则由该波函数给出。量子对称性方法给出的振转耦合谱为

$$E=E_0+\nu_{\mathrm{vib}}\frac{1}{2\sinh(\gamma(J)/2)}\sinh\left(\gamma(J)\left(v+\frac{1}{2}+c(J)\right)\right)+\frac{h^2}{8\pi^2 I}J(J+1) \tag{16}$$

这样,我们就得到了双原子分子振转谱的量子对称性描述。

4 几点评注

自量子群理论建立至今不过十年多的时间,物理学与数学家们从不同的侧面对量子群理论进行了广泛的研究[11]。量子群的表述形式也有多种。对这样一个正在迅速发展的理论做详尽的评述几乎是不可能的。这里,我们尽量简单地用也许不太严格的语言向范围比较广泛的读者介绍量子群的引入背景与研究量子对称性所必须的量子群理论,几乎没有讨论量子群的表示论,特别是量子化参数为单位根时的表示论,是件令人遗憾的事情。量子群理论建立不久,物理学家就注意到量子对称性研究的潜在价值。即使最初的热潮过去之后,依然可以看到各方面取得的不断进展。正是量子对称性的研究使得量子群理论突破了可积系统的原来框架,而被赋予各种不同的物理含义。在动力系统中,量子对称性是保持运动方程协变的隐含对称性;量子群被用来构造与求解格点模型;共形场论提供量子群的几何解释;而具量子对称性的光谱理论与实验很好地符合。当然,这些并非量子对称性的全部,很多重要的进展这里都没有涉及,特别是我们没有讨论 Yangian 与量子仿射对称性。最近的工作表明,高温超导理论中广泛研究的 Hubbard 模型具有 Yangian 对称性,而量子仿射群的表示论是计算格点模型关联函数的有效方法。有关这方面的研究正在迅速取得进展[12]。

我国物理与数学家在量子群与量子对称性方面取得了很多有影响的成果。老一辈科学家不但是这方面研究的骨干力量,而且不惜余力地培养支持青年人迅速进入研究的前沿,形成国际上这方面研究的一支重要力量。此外,还要感谢各方面特别是国家自然科学基金委员会的大力支持。

参 考 文 献

[1] Yang C N. Phys. Rev. Lett., 1967, **19**:1312.

[2] Baxter R J. Ann. Phys. (N.Y.), 1972, **70**: 193.

[3] Drinfel'd V G. in Proceedings of the ICM, Berkeley 1986, ed. Gleason A. M. (American Mathematical Society, Providence, RI, 1987)p798; Jimbo M. Lett. Math. Phys., 1985, **10**:63.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[4] Chang Z. Phys. Rev., 1992, **A45**:4303; *idid*. 1992, **A46**:1400.

[5] Chang Z. Chen W, Guo H Y. J. Phys., 1990, **A23**:4185.

[6] Saleur H, Zuber J -B. in String Theory and Quantum Gravity, eds Green M et al, World Scientific, Singapore, 1991.

[7] Levy D., Phys. Rev. Lett., 1990, **64**:499; *ibid*., 1991, **67**:1971; Hou B Y, Hou B Y, Ma Z Q. J. Phys., 1991 **A24**: 2847.

[8] Gómez C, Sierra G. Nucl. Phys., 1991, **B352**:791; Ramírez C, Ruegg H, Ruiz-Altaba M. *ibid*., 1991, **B364**: 195.

[9] Herzberg G. Molecular Spectra and Molecular Structure. Van Nostrand, Princeton, 1955.

[10] Chang Z, Guo H Y, Yan H. Phys. Lett., 1991, **A156**:192; Chang Z, Yan H. *ibid*., 1991, **A154**:254; Bonatsos D et al. Chem. Phys. Lett., 1990, **175**:300; Chang Z, Yan H. Phys. Rev., 1991, **A44**:7450.

[11] Chang Z. Physics Reports, 1996, **262**:137; 马中骐. 杨-巴克斯特方程与量子包络代数. 北京:科学出版社, 1993; Chari V, Pressley A. A Guide to Quantum Groups. Cambridge University Press, London, 1993.

[12] Jimbo M, Miwa T. Preprint RIMS-981 (1994).

QUANTUM SYMMETRY IN INTEGRABLE AND NON-INTEGRABLE SYSTEMS

Chang Zhe

(*Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing* 100039)

Abstract The subject of integrable models, both classical and quantum, is fascinating. Decades of research in this area have led to mathematical developments which are quite beautiful and which unify various aspects of physical problems that appear to be disparate. One of them, quantum group, is now a popular topic in different fields of modern physics due to its structure richer than that of Lie group. The background of introducing the quantum group, quantum group theory and, in particular, quantum symmetry in integrable and non-integrable systems is reviewed.

Key words quantum group, quantum symmetry, Yang-Baxter equation, integrable system

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net